Toets voor Fourier theorie. 11 oktober 2002, 9:00 tentamenhal

(1) C is de lineaire ruimte, waarvan de elementen de begrensde continue functies $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zijn. Voor $f \in C$ definiëren we $\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$.
(a) Bewijs dat $\| \ \|$ een norm is.
(b) Bewijs dat C, voorzien van deze norm een Banach ruimte is, d.w.z. iedere Cauchy rij in C heeft een limiet. Hint: Iedere Cauchy rij in $\mathbf{R}$ heeft een limiet. Welke andere stellingen gebruikt U?

(2) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi x^n)}{3^n}$.
(a) Bewijs dat deze reeks uniform convergeert op $\mathbf{R}$.
(b) Bewijs dat f continu differentieerbaar is op het interval $(-2, 2)$. Welke stelling(en) gebruikt U?

(3) Bewijs dat de verzameling $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | \ x_1 + x_2 \in \mathbf{Q}\}$ Lebesgue maat nul heeft. Welke stelling(en) gebruikt U?

(4) (a) Geef de definitie van een meetbare deelverzameling $A \subset \mathbf{R}^m$.
(b) Wat is de definitie van een integreerbare functie $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$.

(5) $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ is de funktie $f_n(x) = \sin(x^n)$.
(a) Toon aan dat $F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ convergeert voor elke $x \in [0, 1]$.
(b) Is F continu?
(c) Geldt $\int F(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$?
Welke stelling(en) gebruikt U?